حل تشریحی ریاضی مهندسی
کنکور دکتری ۱۴۰۴
کلیه رشته‌ها

دکتر پیمان پیروان

آموزش تخصصی دکتر پیمان پیروان

ریاضی مهندسی، معادلات دیفرانسیل
ریاضی عمومی۱و۲، محاسبات عددی پیشرفته
تحقیق در عملیات، آمار و احتمال

www.peymanpeyrovan.ir


بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

همه علاقه‌مندان به علم و دانش،

به ویژه داوطلبان دکتری تخصصی

تشکر و قدردانی

در مسیر تدوین این کتاب، پیش از هر چیز وظیفهٔ خود می‌دانم از پدر و مادرم که با مهربانی و حمایت بی‌وقفه، بستر رشد و تحصیل را برایم فراهم کردند، صمیمانه تشکر کنم. ایشان با تحمل سختی‌ها و ایثارگری‌های بی‌چشم‌داشت، سنگ بنای اعتماد به‌نفس و پشتکار را در وجودم نهادند.

از همسر عزیزم که در طول ماه‌های پرفرازونشیب تألیف این کتاب، با همراهی و درک بی‌همتا، آرامش و انگیزه را به من هدیه داد، قدردانی می‌کنم. همچنین از فرزندان عزیزم که با صبر و درک خود، فضای آرامی برای تمرکز بر این پروژه ایجاد کردند، صمیمانه سپاسگزارم.

بر خود لازم می‌دانم از استادان ارجمندی که در طول سال‌های تحصیل، دانش و تجربهٔ خود را با سخاوت در اختیارم گذاشتند، تشکر ویژه داشته باشم. آموزه‌های ارزشمند ایشان نه تنها پایه‌های علمی من را تقویت کرد، بلکه شیوهٔ اندیشیدن و نگاه به مسائل را به من آموخت. هر بخش این کتاب، وام‌دار راهنمایی‌ها و الهام‌بخشی‌های آن بزرگواران است.

امیدوارم این اثر بتواند گامی هرچند کوچک در خدمت به جامعهٔ علمی کشور باشد و گوشه‌ای از محبت‌های همهٔ عزیزانی را که در این مسیر یاری‌ام دادند، جبران کند.

پیمان پیروان

فهرست مطالب

.

پیشگفتار

داوطلبان گرامی آزمون دکتری تخصصی رشته‌های فنی و مهندسی،

با افتخار، کتاب حاضر، حاصل تلاش و تجربه سالیان متمادی در عرصه آموزش و حل مسائل پیچیده ریاضی مهندسی، به شما عزیزان تقدیم می‌گردد. نیک می‌دانیم که درس ریاضی مهندسی، به عنوان یکی از دروس بنیادین و در عین حال چالش‌برانگیز در آزمون سرنوشت‌ساز دکتری تخصصی، همواره نقشی کلیدی در تعیین سرنوشت داوطلبان ایفا نموده است.

در سال‌های اخیر، شاهد ارتقای سطح کیفی و افزایش پیچیدگی سوالات ریاضی مهندسی در کنکور دکتری تخصصی بوده‌ایم. طرح سوالات ترکیبی از مباحث مختلف و نیاز به درک عمیق مفاهیم، بیش از پیش اهمیت تسلط جامع و روشمند بر این درس را آشکار ساخته است. از این رو، کتاب حاضر با هدف پاسخگویی به این نیاز مبرم و ارائه رویکردی نوین در حل مسائل، تدوین گردیده است.

آنچه این کتاب را از سایر منابع موجود متمایز می‌سازد، تاکید ویژه بر حل فراتشریحی و گام به گام تمامی تست‌های آزمون ۱۴۰۴ است. در این روش، نه تنها پاسخ مسئله ارائه می‌گردد، بلکه تمامی مراحل استدلال، فرمول‌های مورد استفاده، نکات کلیدی و ریزه کاری‌های حل مسئله به صورت دقیق و شفاف تشریح شده است. هدف ما این بوده است که داوطلب با مطالعه هر پاسخ، ضمن درک کامل فرآیند حل، به تسلط عمیق بر مفاهیم مرتبط نیز دست یابد.

رویکرد آموزشی این کتاب، فراتر از صرف ارائه پاسخ است. تلاش شده است تا با آنالیز گام به گام و تفصیلی راه حل‌ها، خواننده را در مسیر کشف پاسخ صحیح همراهی نموده و قدرت تحلیل و استدلال او را تقویت نماییم. این شیوه آموزشی، کتاب حاضر را به یک منبع خودآموز تبدیل نموده و امکان یادگیری عمیق و پایدار را برای داوطلبان فراهم می‌سازد.

اهمیت درس ریاضی مهندسی در موفقیت شما در آزمون دکتری تخصصی بر هیچ‌کس پوشیده نیست. تسلط بر این درس، نه تنها شانس قبولی شما را به طور چشمگیری افزایش می‌دهد، بلکه بنیان علمی مستحکمی برای ادامه تحصیل و انجام پژوهش‌های پیشرفته در مقطع دکتری تخصصی فراهم می‌آورد.

باور داریم که این کتاب، با ارائه رویکردی کاملاً نوآورانه در حل تشریحی تست‌ها که تاکنون در هیچ منبع دیگری ارائه نشده است، می‌تواند راهگشای شما عزیزان در مسیر پر فراز و نشیب آمادگی برای آزمون دکتری تخصصی باشد.

هدف نهایی ما، ارتقای سطح دانش و آمادگی شما و تحقق رویای ورود به دوره دکتری تخصصی است. امید است که این اثر، مورد استقبال شما فرهیختگان قرار گیرد و گامی موثر در اعتلای سطح علمی کشور عزیزمان ایران باشد. با آرزوی موفقیت روزافزون برای تمامی شما عزیزان،

دکتر پیمان پیروان، فروردین ۱۴۰۴

برای دسترسی به منابع تکمیلی، فیلم های آموزشی، آموزشهای رایگان و پشتیبانی آنلاین

به سایت دکتر پیمان پیروان به آدرس $www.peymanpeyrovan.ir$ مراجعه کنید.

فصل اوّل

ریاضی مهندسی با دکتر پیروان

۱.۱ حل تشریحی ریاضی مهندسی، کنکور دکتری ۱۴۰۴: مهندسی برق

تست ۱. فرض کنید $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ یک تابع تحلیلی ناصفر باشد و به ازای مقادیر حقیقی α و β، $v(x, y) = \alpha x \cosh(x) \cos(y) + \beta y \sinh(x) \sin(y)$ باشد. کدام مورد درست است؟

۱. $\alpha = \beta$

۲. $\alpha = -\beta$

۳. $\alpha = \beta = ۱$

۴. $\alpha\beta = ۰$

پاسخ. گزینه ۲ صحیح است. طبق فرض تابع مختلط زیر تحلیلی است

$$f(z) \;=\; u(x,y) \;+\; i\, v(x,y)$$

شرط تحلیلی‌بودن ایجاب می‌کند که v (و همچنین u) تابعی هارمونیک باشد. :هارمونیک بودن یعنی صدق‌کردن معادلهٔ لاپلاس

$$v_{xx} \;+\; v_{yy} \;=\; ۰.$$

در صورت سؤال، قسمت موهومی تابع به شکل زیر داده شده است:

$$v(x,y) \;=\; \alpha\, x\, \cosh(x)\, \cos(y) \;+\; \beta\, y\, \sinh(x)\, \sin(y).$$

برای یافتن شرط α و β باید ابتدا مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم را محاسبه کرده و در معادلهٔ لاپلاس قرار دهیم.

$$v_x \;=\; \alpha\, \big[\cosh(x) + x\, \sinh(x)\big]\, \cos(y) \;+\; \beta\, y\, \cosh(x)\, \sin(y),$$

$$v_y \;=\; -\,\alpha\, x\, \cosh(x)\, \sin(y) \;+\; \beta\, \sinh(x)\, \big[\sin(y) \;+\; y\, \cos(y)\big].$$

$$v_{xx} = \alpha\left[۲\sinh(x) + x\cosh(x)\right]\cos(y) + \beta\, y\sinh(x)\sin(y),$$

$$v_{yy} = -\alpha\, x\cosh(x)\cos(y) + ۲\beta\sinh(x)\cos(y) - \beta\, y\sinh(x)\sin(y).$$

لذا:

$$v_{xx} + v_{yy} = \Big[\alpha\left(۲\sinh(x) + x\cosh(x)\right) - \alpha\, x\cosh(x) + ۲\beta\sinh(x)\Big]\cos(y).$$

در نتیجه،

$$v_{xx} + v_{yy} = ۲\left(\alpha + \beta\right)\sinh(x)\cos(y).$$

برای هارمونیک بودن v باید عبارت بالا برای همهٔ x, y برابر صفر باشد. از آنجا که $\sinh(x)\cos(y)$ به‌طور کلی صفر نیست، تنها راه صفرشدن، این است که:

$$\alpha + \beta = \circ \implies \alpha = -\beta.$$

تست ۲. مقدار انتگرال $\oint_{|z|=۱} \frac{dz}{\cos z - ۲}$ کدام است؟

۱) $-۲\pi i$

۲) $-\pi i$

۳) صفر

۴) $۲\pi i$

پاسخ. گزینه ۳ صحیح است. برای حل این انتگرال، از قضیه مانده‌ها استفاده می‌کنیم. ابتدا باید قطب‌های تابع درون دایره $|z| = ۱$ را پیدا کنیم. قطب‌های تابع زمانی رخ می‌دهند که مخرج صفر شود، یعنی:

$$\cos(z) - ۲ = \circ \Rightarrow \cos(z) = ۲$$

از آنجایی که مقدار $\cos(z)$ همیشه بین ۱− و ۱ است، معادله $\cos(z) = ۲$ هیچ جوابی در اعداد حقیقی ندارد. با این حال، در اعداد مختلط، جواب‌هایی وجود دارد. برای یافتن جواب‌های مختلط، از فرمول اویلر استفاده می‌کنیم:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲}$$

بنابراین، معادله $\cos(z) = ۲$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲} = ۲ \quad \Rightarrow \quad e^{iz} + e^{-iz} = ۴$$

با ضرب کردن هر دو طرف در e^{iz}، معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$e^{۲iz} + ۱ = ۴e^{iz} \quad \Rightarrow \quad e^{۲iz} - ۴e^{iz} + ۱ = ۰$$

این معادله یک معادله درجه دوم بر حسب e^{iz} است. با حل آن، دو جواب برای e^{iz} به دست می‌آوریم:

$$e^{iz} = ۲ \pm \sqrt{۳}$$

با گرفتن لگاریتم طبیعی از هر دو طرف، دو جواب برای z به دست می‌آوریم:

$$z = -i \ln(۲ \pm \sqrt{۳})$$

بنابراین، دو قطب داریم:

$$z_۱ = -i \ln(۲ + \sqrt{۳}) \quad \text{و} \quad z_۲ = -i \ln(۲ - \sqrt{۳})$$

با توجه به اینکه $\ln(۲ - \sqrt{۳}) = -\ln(۲ + \sqrt{۳})$، می‌توانیم بنویسیم:

$$z_۱ = -i \ln(۲ + \sqrt{۳}) \quad \text{و} \quad z_۲ = i \ln(۲ + \sqrt{۳})$$

با محاسبه مقدار عددی، می‌بینیم که $|z_۱| \approx ۱٫۳۱۷$ و $|z_۲| \approx ۱٫۳۱۷$. بنابراین، هر دو قطب خارج از دایره $|z| = ۱$ قرار دارند. از آنجایی که هیچ قطبی درون دایره $|z| = ۱$ وجود ندارد، مانده‌ها در این قطب‌ها صفر هستند.

طبق قضیه مانده‌ها، انتگرال برابر با $۲\pi i$ ضرب در مجموع مانده‌ها است. از آنجایی که مجموع مانده‌ها صفر است، انتگرال نیز صفر خواهد بود.

تست ۳. مانده تابع زیر در $z = ۰$ کدام است؟

$$\sin(z) = \frac{e^{-z} - ۱}{\sinh(z) - \sin(z)}$$

۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{-۱}{۳}$

۴) $\frac{-۱}{۲}$

پاسخ. گزینه ۱ صحیح است. قطبهای $f(z)$ در نقاطی هستند که مخرج صفر شود:

$$\sinh(z) - \sin(z) = ۰$$

این معادله در $z = ۰$ و $z = n\pi i$ (برای $n \in \mathbb{Z}$) صفر می شود.

جهت محاسبه مانده در $z = ۰$ با استفاده از بسط تیلور حول صفر:

$$\sinh(z) \approx z + \frac{z^۳}{۶}, \quad \sin(z) \approx z - \frac{z^۳}{۶}$$

بنابراین:

$$\sinh(z) - \sin(z) \approx \frac{z^۳}{۳}$$

صورت کسر نیز:

$$e^{-z} - ۱ \approx -z + \frac{z^۲}{۲}$$

بنابراین:

$$f(z) \approx \frac{-z + \frac{z^۲}{۲}}{\frac{z^۳}{۳}} = \frac{-۳}{z^۲} + \frac{۳}{۲z}$$

مانده در $z = ۰$ برابر با ضریب $\frac{۱}{z}$ است:

$$\mathrm{Res}(f, ۰) = \frac{۳}{۲}$$

تست ۴. مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_۰^{۲\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)\, d\theta$$

۱. ۰

۲. $\frac{\pi}{۲}$

۳. π

۴. ۲π

پاسخ. گزینه ۴ صحیح است. مراحل محاسبه:

۱. تبدیل به فرم مختلط: با جایگزینی $z = e^{i\theta}$ (کانتور دایره واحد)، داریم

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \cos\theta = \frac{z+z^{-۱}}{۲}, \quad \sin\theta = \frac{z-z^{-۱}}{۲i}$$

انتگرال تبدیل می شود به

$$\oint_{|z|=۱} \cos\left(\frac{z+z^{-۱}}{۲}\right)\cosh\left(\frac{z-z^{-۱}}{۲i}\right)\frac{dz}{iz}$$

۲. ساده‌سازی توابع: استفاده از رابطه $\cosh(ix) = \cos(x)$

$$\cosh\left(\frac{z-z^{-۱}}{۲i}\right) = \cos\left(\frac{z-z^{-۱}}{۲}\right)$$

بنابراین، انتگرال به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\frac{۱}{i}\oint_{|z|=۱} \frac{\cos\left(\frac{z+z^{-۱}}{۲}\right)\cos\left(\frac{z-z^{-۱}}{۲}\right)}{z}\,dz$$

۳. استفاده از اتحاد مثلثاتی: با اعمال اتحاد $\cos A\cos B = \frac{۱}{۲}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$

$$\cos\left(\frac{z+z^{-۱}}{۲}\right)\cos\left(\frac{z-z^{-۱}}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}\left[\cos(z)+\cos(z^{-۱})\right]$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{۲i}\oint_{|z|=۱}\frac{\cos(z)+\cos(z^{-۱})}{z}\,dz$$

۴. محاسبه انتگرال برای هر جمله:

- جمله اول $(\cos(z)/z)$: قطب ساده در $z=۰$ با مانده

$$\text{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, ۰\right) = \cos(۰) = ۱$$

- جمله دوم $(\cos(z^{-۱})/z)$: با جایگزینی $w = z^{-۱}$، انتگرال تبدیل به

$$\oint_{|w|=۱}\frac{\cos(w)}{w}\,dw$$

که مانده آن نیز ۱ است.

۵. اعمال قضیه مانده‌ها:

$$\frac{۱}{۲i} \cdot ۲\pi i \cdot (۱ + ۱) = ۲\pi$$

تست ۵. با توجه به رابطه زیر مقدار α کدام است؟

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^{۲} + ۱}\, dx = ۲\pi$$

۱. $-\ln ۴$

۲. صفر

۳. $\ln ۲$

۴. $\ln ۴$

پاسخ. گزینه ۱ صحیح است. برای محاسبه مقدار α در انتگرال داده شده که برابر با ۲π است، از روش انتگرال‌های مختلط و حساب مانده‌ها استفاده می‌کنیم. مراحل محاسبه:

۱. تعریف تابع مختلط: تابع مختلط را به صورت $f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{z^{۲}+۱}$ در نظر میگیریم. انتگرال حقیقی، بخش حقیقی این تابع است.

۲. انتخاب کانتور: با توجه به حدود انتگرال، کانتور انتگرالگیری یک نیم‌دایره در نیم‌صفحه بالایی با شعاع R است.

۳. محاسبه مانده در $z = i$:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) \cdot \frac{e^{i\alpha z}}{(z - i)(z + i)} = \frac{e^{i\alpha i}}{۲i} = \frac{e^{-\alpha}}{۲i}$$

توجه داشته باشید $z = -i$ در کانتور مورد نظر نیست لذا در محاسبه مانده لحاظ نمی‌شود.

۴. اعمال قضیه مانده‌ها:

$$\oint_C f(z)\, dz = ۲\pi i \cdot \frac{e^{-\alpha}}{۲i} = \pi e^{-\alpha}$$