بانک مساله خودآموز

توابع گاما و بتا

ریاضی عمومی تخصصی

دکتر پیمان پیروان www.peymanpeyrovan.ir

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

مساله

$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$$

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{5!}{2 \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 30$$

مساله

$$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ x > 0$$

$$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{3}{4}$$

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

مساله

$$\frac{\Gamma(3)\,\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)}$$

روابط مورد نیاز

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ x > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\frac{\Gamma(3)\,\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)} = \frac{2!(1.5)(0.5)\,\Gamma(0.5)}{(4.5)(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\,\Gamma(0.5)} = \frac{16}{315}$$

مساله

$$\frac{6\,\Gamma(\frac{8}{3})}{5\,\Gamma(\frac{2}{3})}$$

$$\frac{6\,\Gamma(\frac{8}{3})}{5\,\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{6(\frac{5}{3})(\frac{2}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})}{5\,\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{4}{3}$$

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

مساله

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x}\, dx$$

روابط مورد نیاز

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x}\, dx = \Gamma(4) = 3! = 6$$

مساله

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x}\, dx.$$

در مساله دوم با تغییر متغیر به فرم انتگرال گاما می‌رسیم

تغییر متغیر $\rightarrow\ 2x = y$

تعریف انتگرال گاما

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^6 e^{-y} \frac{dy}{2} = \frac{1}{2^7}\int_0^{\infty} y^6 e^{-y}\, dy = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$$

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

مساله

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) \overset{?}{=} \sqrt{\pi}.$$

روابط مورد نیاز

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

جایگذاری $x = \frac{1}{2}$ در تابع گاما $\rightarrow$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\, dx.$$

تغییر متغیر: $x = u^2$ $\rightarrow$

$$2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

از انتگرال ناسره

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

محاسبه انتگرال ناسره با کمک تابع گاما

مساله

$$\int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-y^2}\, dy.$$

تغییر متغیر، دیفرانسیل گیری و محاسبه dy بر حسب dx $\rightarrow$

$$y^3 = x, \quad dy = \frac{1}{3} x^{-2/3}\, dx$$

بازنویسی مساله بر حسب x $\rightarrow$

$$\int_0^\infty \sqrt{x^{1/3}}\, e^{-x} \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^\infty x^{-1/2}\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

مرتب سازی جبری

تعریف تابع گاما

مسایل قبل!

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

محاسبه انتگرال ناسره با کمک تابع گاما

مساله

$$\int_0^{\infty} 3^{-4x^2}\, dx$$

حل کامل در سایت دکتر پیروان در طرح رایگان ساعت ریاضی

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

محاسبه انتگرال ناسره با کمک تابع گاما

مساله

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

از طرفین $e^{\cdots}$ می‌گیریم

محاسبه حدود جدید

تغییر متغیر $\rightarrow$ $-\ln x = u \Rightarrow x = e^{-u} \Rightarrow$

$$x = 1, u = 0;$$

$$x = 0, u = \infty$$

مسایل قبل

بازنویسی مساله بر حسب u $\rightarrow$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u}\, du = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

تعریف تابع گاما

مرتب سازی جبری

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

مساله

$$\Gamma(-5/2) = ؟$$

$$\Gamma(-5/2) = \frac{\Gamma(-3/2)}{-5/2}, \quad \Gamma(-3/2) = \frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2}, \quad \Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(1/2)}{-1/2}$$

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-3/2) = \frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-3/2} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3},$$

$$\Gamma(-5/2) = \frac{\Gamma(-3/2)}{-5/2} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

روابط مورد نیاز

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

محاسبه انتگرال ناسره با کمک تابع گاما

مساله

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\, dx$$

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\, dx = \frac{1}{na^{(m+1)/n}}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

پاسخ در کلاس‌های آنلاین، فیلم آموزشی و نیز طرح ساعت ریاضی در سایت دکتر پیروان

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

محاسبه انتگرال ناسره با کمک تابع گاما

مساله

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx$$

راهنمایی

تغییر متغیر → $x = e^{-y},$

پاسخ → $$\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

پاسخ کامل در سایت دکتر پیروان، فیلم آموزشی و یا طرح رایگان ساعت ریاضی

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

روابط مورد نیاز

$$B(u,v)=\frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}\qquad u,v>0$$

$$B(u,v)=\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx$$

مساله

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx$$

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx=B(5,4)=\frac{\Gamma(5)\,\Gamma(4)}{\Gamma(9)}=\frac{4!3!}{8!}=\frac{1}{280}$$

مساله

$$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-x}}$$

توجه: تمام جزئیات تغییر متغیر مانند مسایل قبل است.

تغییر متغیر $\rightarrow$ $x=2v$

$$4\sqrt{2}\int_0^1 \frac{v^2}{\sqrt{1-v}}\,dv=4\sqrt{2}\int_0^1 v^2(1-v)^{-1/2}\,dv=4\sqrt{2}\,B(3,\tfrac{1}{2})=\frac{4\sqrt{2}\,\Gamma(3)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(7/2)}=\frac{64\sqrt{2}}{15}$$

www.peymanpeyrovan.ir دکتر پیمان پیروان

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

مساله

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6\theta \, d\theta$$

فرمول حل مساله

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2u-1}\theta \cos^{2v-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{2\,\Gamma(u+v)} \qquad u, v > 0$$

مقایسه مساله با
فرمول حل مساله

$$2u - 1 = 6, 2v - 1 = 0 \Rightarrow u = 7/2, v = 1/2$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(7/2)\,\Gamma(1/2)}{2\,\Gamma(4)} = \frac{5\pi}{32}$$

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

مساله

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^5\theta \, d\theta$$

فرمول حل مساله

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2u-1}\theta \cos^{2v-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{2\,\Gamma(u+v)} \qquad u, v > 0$$

مقایسه مساله با فرمول حل مساله

$$2u - 1 = 4,\ 2v - 1 = 5 \Rightarrow u = 5/2,\ v = 3$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^5\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(5/2)\,\Gamma(3)}{2\,\Gamma(11/2)} = \frac{8}{315}$$

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا

مساله

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$$

فرمول حل مساله

$$\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}\,dy = B(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

تغییر متغیر $\rightarrow$ $x^4 = y$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 y^{-3/4}(1-y)^{1/2}\,dy = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{\Gamma(1.4)\Gamma(3/4)}$$

بانک مساله خودآموز: توابع گاما و بتا، حل تشریحی مسایل بیشتر در سایت

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x}\,dx, \qquad \int_0^\infty x^6 e^{-3x}\,dx, \qquad \int_0^\infty x^2 e^{-2x^2}\,dx.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \sqrt[4]{x}\, e^{-\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^\infty y^3 e^{-2y^5}\,dy.$$

$$\int_0^1 (\ln x)^4\,dx, \qquad \int_0^1 (x\ln x)^3\,dx, \qquad \int_0^1 \sqrt[3]{\ln(1/x)}\,dx$$

$$\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{(1-x)/x}\,dx, \qquad \int_0^2 (4-x^2)^{3/2}\,dx$$

- سایر مباحث در قالب فیلم‌های آموزشی، کلاس آنلاین و جزوات بانک مساله خودآموز در سایت دکتر پیروان موجود است.

جزوات بانک مساله خودآموز

برای اولین بار در ایران

در سایت دکتر پیروان

جزوه‌های «بانکِ مساله» با حل تشریحی

www.peymanpeyrovan.ir

آموزش آنلاین ، فیلم‌های آموزشی، رفع اشکال رایگان

ریاضیات با تاکید بر مساله

آموزش تضمینی و تخصصی

دکتر پیمان پیروان

www.peymanpeyrovan.ir

ادامه دارد...

سایر آموزش‌ها به همراه حل تمرین

در سایت دکتر پیروان موجود است.