

حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی کلیه رشته‌ها

کارشناسی ارشد ۱۴۰۴

دکتر پیمان پیروان

avidmath



آموزش تخصصی دکتر پیمان پیروان

ریاضی مهندسی، معادلات دیفرانسیل
ریاضی عمومی ۱ و ۲، محاسبات عددی پیشرفته
تحقیق در عملیات ۱ و ۲، آمار و احتمال

www.peymanpeyrovani.ir



کلیه‌ی حقوق اعم از چاپ و تکثیر،
نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این
کتاب
برای دکتر پیمان پیروان محفوظ است.
نقل مطالب در هر صورت ممنوع است.

تقدیم به

همه علاقه مندان به علم و دانش،
به ویژه داوطلبان تحصیلات تکمیلی

تشکر و قدردانی

در مسیر تدوین این کتاب، پیش از هر چیز وظیفه خود می‌دانم از پدر و مادرم که با مهربانی و حمایت بی‌وقفه، بستر رشد و تحصیل را برایم فراهم کردند، صمیمانه تشکر کنم. ایشان با تحمل سختی‌ها و ایثارگری‌های بی‌چشم‌داشت، سنگ بنای اعتماد به نفس و پشتکار را در وجودم نهادند.

از همسر عزیزم که در طول ماه‌های پرفرازونشیب تألیف این کتاب، با همراهی و درک بی‌همتا، آرامش و انگیزه را به من هدیه داد، قدردانی می‌کنم. همچنین از فرزندان عزیزم که با صبر و درک خود، فضای آرامی برای تمرکز بر این پروژه ایجاد کردند، صمیمانه سپاسگزارم.

بر خود لازم می‌دانم از استادان ارجمندی که در طول سال‌های تحصیل، دانش و تجربه خود را با سخاوت در اختیارم گذاشتند، تشکر ویژه داشته باشم. آموزه‌های ارزشمند ایشان نه تنها پایه‌های علمی من را تقویت کرد، بلکه شیوه اندیشیدن و نگاه به مسائل را به من آموخت. هر بخش این کتاب، وام‌دار راهنمایی‌ها و الهام‌بخشی‌های آن بزرگواران است.

امیدوارم این اثر بتواند گامی هرچند کوچک در خدمت به جامعه علمی کشور باشد و گوشه‌ای از محبت‌های همه عزیزانی را که در این مسیر یاری‌ام دادند، جبران کند.

پیمان پیروان

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
د	پیشگفتار
۲	۱ ریاضی عمومی با دکتر پیروان
۳	۱.۱ مهندسی صنایع
۳	۱.۱.۱ حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی
۲۶	۲.۱.۱ تحلیل آماری و تکنیکال تستها
۲۷	۳.۱.۱ مهندسی صنایع: کلیات، فرصتها و چشم انداز
۳۱	۲.۱ مهندسی عمران
۳۱	۱.۲.۱ حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی
۴۴	۲.۲.۱ تحلیل آماری و تکنیکال تستها
۴۵	۳.۲.۱ مهندسی عمران: کلیات، فرصت ها و چشم انداز
۴۸	۳.۱ مهندسی کامپیوتر
۴۸	۱.۳.۱ حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی
۵۹	۲.۳.۱ تحلیل آماری و تکنیکال تستها
۶۰	۳.۳.۱ مهندسی کامپیوتر: کلیات، فرصت ها و چشم انداز
۶۳	۴.۱ مدیریت کسب و کار و امور شهری MBA
۶۳	۱.۴.۱ حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی
۹۴	۲.۴.۱ تحلیل آماری و تکنیکال تستها
۹۵	۳.۴.۱ MBA کلیات، فرصتها و چشم انداز
۹۷	۵.۱ مهندسی نفت
۹۷	۱.۵.۱ حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی
۱۰۸	۲.۵.۱ تحلیل آماری و تکنیکال تستها
۱۰۸	۳.۵.۱ مهندسی نفت: کلیات، فرصتها و چشم انداز

۶.۱	مهندسی نقشه برداری	۱۱۱
۱.۶.۱	حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی	۱۱۱
۲.۶.۱	تحلیل آماری و تکنیکال تستها	۱۳۶
۳.۶.۱	مهندسی نقشه برداری: کلیات، فرصتها و چشم انداز	۱۳۶
۷.۱	مهندسی مکانیک: بیوسیستم	۱۴۱
۱.۷.۱	حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی	۱۴۱
۲.۷.۱	تحلیل آماری و تکنیکال تستها	۱۶۰
۳.۷.۱	مهندسی مکانیک بیوسیستم: معرفی، فرصتها و چشم انداز	۱۶۱
۴.۷.۱	برخی از کاربردها و زمینه‌های نوظهور	۱۶۳
۸.۱	مهندسی مواد متالورژی	۱۶۷
۱.۸.۱	حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی	۱۶۷
۲.۸.۱	تحلیل آماری و تکنیکال تستها	۱۷۸
۳.۸.۱	مهندسی مواد متالورژی: کلیات، فرصتها و چشم انداز	۱۷۸
۹.۱	مهندسی نساجی	۱۸۳
۱.۹.۱	حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی	۱۸۳
۲.۹.۱	تحلیل آماری و تکنیکال تستها	۱۹۴
۳.۹.۱	مهندسی نساجی: کلیات و فرصتهای نوظهور	۱۹۴
۱۰.۱	مهندسی معماری کشتی	۱۹۷
۱.۱۰.۱	حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی	۱۹۷
۲.۱۰.۱	تحلیل آماری و تکنیکال تستها	۲۰۲
۳.۱۰.۱	مهندسی معماری کشتی: کلیات، فرصتها و چشم انداز	۲۰۲
۱۱.۱	مهندسی معدن	۲۰۶
۱.۱۱.۱	حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی	۲۰۶
۲.۱۱.۱	تحلیل آماری و تکنیکال تستها	۲۲۰
۳.۱۱.۱	مهندسی معدن: کلیات، فرصتها و چشم انداز	۲۲۱
۱۲.۱	مهندسی آب	۲۲۴
۱.۱۲.۱	حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی	۲۲۴
۲.۱۲.۱	تحلیل آماری و تکنیکال تستها	۲۴۷
۳.۱۲.۱	مهندسی آب: کلیات، فرصتها و چشم انداز	۲۴۷

.

پیشگفتار

ریاضیات عمومی، به مثابه ستون فقرات علوم مهندسی، نقش بی‌بدیلی در شکل‌دهی به چارچوب فکری دانشجویان و مهندسين آینده ایفا می‌کند. گستره وسیع مباحث این درس از حساب دیفرانسیل و انتگرال گرفته تا مبانی جبر خطی و معادلات دیفرانسیل پایه و زیربنای تحلیل دقیق مسایل پیچیده مهندسی است. تسلط بر ریاضیات عمومی نه تنها موفقیت در آزمون کارشناسی‌ارشد را تضمین می‌کند، بلکه توان حل مسئله را در دوره‌های تحصیلات تکمیلی و محیط‌های تحقیقاتی به‌طور چشمگیری ارتقا می‌دهد.

کتاب حاضر حاصل بیش از بیست سال تجربه تدریس دانشگاهی و پژوهش نگارنده در حوزه ریاضیات است و برای نخستین بار، تمامی سؤالات ریاضیات عمومی کنکور کارشناسی‌ارشد سال ۱۴۰۴ کلیه رشته‌های فنی و مهندسی را به‌صورت کاملاً تشریحی و الگوریتم‌محور تنظیم و ارائه نموده است. در این اثر:

* **روش منحصربه‌فرد حل تشریحی:** هر تست با گام‌های کاملاً تشریحی، به‌صورت الگوریتمی و مرحله به مرحله بررسی شده است تا خواننده علاوه بر دستیابی به پاسخ نهایی، فرایند استدلالی و تکنیک‌های کلیدی را به‌خوبی درک کند.

* **درخشندگی در تشریح مفاهیم:** تعاریف، قضایا و نکات اساسی با زبانی ساده و در عین حال دقیق بیان شده‌اند تا فضای آموزشی در کلاس درس به‌طور مجازی بازتولید شود.

* **تاکید بر نکات کلیدی و تله‌های آزمونی:** در طول راه‌حل‌ها، نکات طلایی و نکات اغواگرانه آزمون‌ها برجسته شده تا داوطلبان بتوانند با چشمانی تیزبین به متون سؤال نگاه کنند.

این سبک نگارش، نخستین تجربه‌ای است که با رویکردی کاملاً سیستماتیک و مرحله‌ای، از پایه تا انتها، داوطلبان را در مسیر حل سؤالات کنکور همراهی می‌نماید. هدف اصلی این است که پس از مطالعه این کتاب، نه صرفاً توان حل سؤالات ۱۴۰۴ بلکه قدرت ابداع راه‌حل‌های جدید در مواجهه با سؤالات آینده نیز در مخاطب ایجاد شود. خوانندگان گرامی می‌توانند برای دسترسی به منابع تکمیلی و پشتیبانی آموزشی به وب‌سایت رسمی اینجانب به نشانی www.peymanpeyrovan.ir مراجعه نمایند. در این سایت:

* فیلم‌های آموزشی ریاضیات عمومی با کیفیت تصویری و محتوایی بالا بارگذاری شده است.

* نمونه آموزش‌های رایگان در اختیار شما قرار دارد تا از سبک آموزش قبل از خرید اطمینان حاصل کنید.

* بخش نظرات رایگان پس از تهیه کتاب فعال می‌شود و ضمن رفع اشکال رایگان، امکان تبادل نظر با مدرس و سایر دانشجویان فراهم است.

وجه تمایز این کتاب در مقایسه با سایر منابع

در اغلب کتاب‌های کنکور، تأکید اصلی بر ارائه فرمول‌ها و تمرین‌های تکراری است؛ اما در این اثر، «هنر حل مسئله» جایگاه اول را دارد. در ادامه، مهم‌ترین ویژگی‌هایی را که این کتاب را از دیگر منابع موجود متمایز می‌سازد، برمی‌شماریم:

۱. رویکرد مبتنی بر تفکر تحلیلی به جای حفظ فرمول

هر مسئله، پیش از ارائه راه‌حل، به اجزای ساختاری خود شکافته می‌شود تا خواننده با منطق پشت هر گام آشنا شود. تکنیک‌های عمومی حل مسئله (مثل «تقسیم مسأله به زیرمسأله»، «بازگشت گام به عقب» و «تحلیل حد و پیوستگی») در قالب مثال‌های متنوع بررسی شده‌اند. با تمرین مداوم این مهارت‌ها، داوطلب به تدریج از حالت «فرمول‌محوری» به «استدلال‌محوری» منتقل می‌شود و می‌آموزد در سؤالات جدید یا ترکیبی، فرمول مناسب را خود استخراج و به‌کار گیرد.

۲. تشخیص موضوعی تست در کمترین زمان

در ابتدای هر بخش حل تشریحی، «شاخص‌های کلیدی تشخیص موضوع» آورده شده است: مثلاً واژگان هشداردهنده در سؤال انتگرال، سرنخ‌های وجود بردارها در جبر خطی یا عبارت‌های نشانه‌گر حل معادلات دیفرانسیل.

هر تست با برچسب موضوعی (مانند «انتگرال معین و نامعین»، «تبدیل لاپلاس» یا «فضای اقلیدسی و بردارها») مشخص شده است تا مطالعه موضوعی و مرور سریع امکان‌پذیر شود.

نکته‌برداری هوشمند: با راهنمایی برای استخراج کلیدواژه‌ها و علائم بصری موجود در صورت سؤال، داوطلب قادر خواهد بود در آزمون اصلی تنها با یک نگاه اجمالی، دسته‌بندی مسئله را تشخیص دهد.

۳. الگوریتم‌سازی برای هر نوع سؤال

به جای حل‌های پراکنده، برای هر دسته از مسائل یک «الگوریتم ثابت» معرفی شده که در چند مرحله‌ی مشخص اجرا می‌شود. این الگوریتم‌ها به گونه‌ای طراحی شده‌اند که هم برای حل دستی و هم برای درک پیاده‌سازی نرم‌افزاری مناسب باشند. با مکانیسم «چک لیست حل»، پس از پایان هر تست، خواننده می‌تواند

خودکار درستی روند حل را بررسی و تضمین کند.

۴. تلفیق تئوری و مثال‌های کاربردی

هر مبحث با اشاره به کاربردهای مهندسی (مثل تحلیل سیستم‌های کنترل، جریان سیال یا ارتعاشات مکانیکی) آغاز شده تا انگیزه و تصویر ذهنی داوطلب تقویت شود. مثال‌های حل‌شده، مجموعه‌ای از مسائل تئوری و شبیه‌سازی‌های صنعتی را شامل می‌شوند تا پل میان دانشگاه و صنعت به خوبی برقرار گردد.

۵. افزایش خلاقیت در حل تست‌های ترکیبی

بخش ویژه‌ای به «تست‌های چند موضوعه» اختصاص یافته که روش‌هایی برای ترکیب مباحث مختلف (مثلاً انتگرال‌گیری از توابع برداری یا استفاده از سری فوریه در حل معادلات دیفرانسیل) ارائه می‌دهد. با بهره‌گیری از تکنیک «تجزیه مسئله به بلوک‌های موضوعی»، حتی پیچیده‌ترین تست‌های کنکور، به گام‌های ساده و قابل دسترس تبدیل شده‌اند. با این رویکرد متفاوت و جامع، هدف ما فراتر از کسب درصد بالا در کنکور است؛ قصد داریم شما را مجهز به تفکری نظام‌مند، خلاق و قدرتمند کنیم که در هر آزمون یا چالش علمی و پژوهشی، توان خلق راه‌حل‌های نوین و اثربخش را داشته باشید. امید است این اثر، دریچه‌ای نوین به دنیای ریاضیات عمومی کنکور برای شما بگشاید و گامی مؤثر در مسیر کسب رتبه‌های برتر باشد. با آرزوی موفقیت، دکتر پیمان پیروان، فروردین ۱۴۰۴

برای دسترسی به منابع تکمیلی و پشتیبانی آنلاین، به سایت www.peymanpeyrovani.ir مراجعه کنید.

ریچارد فاینمن:

سخت مطالعه کن آنچه بیش از همه برای جالب است، آن‌هم به بی‌نظم‌ترین، بی‌پروا ترین و خلاقانه‌ترین شکل ممکن.

فصل اوّل

ریاضی عمومی با دکتر پیروان

۱.۱ مهندسی صنایع

۱.۱.۱ حل تشریحی تستهای ریاضی عمومی

تست ۱. مکان هندسی جوابهای معادله مختلط $z^2 + \bar{z}^2 = 1$ کدام است؟

۱. خط راست ۲. دایره ۳. بیضی ۴. هذلولی

پاسخ. گزینه ۴ صحیح است.

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$$

با جمع دو عبارت بالا، بخش‌های موهومی حذف می‌شوند:

$$z^2 + \bar{z}^2 = (x^2 - y^2 + 2ixy) + (x^2 - y^2 - 2ixy) = 2(x^2 - y^2)$$

معادله داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$2(x^2 - y^2) = 1 \implies x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$$

یک هذلولی استاندارد است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

در اینجا $a^2 = \frac{1}{2}$ و $b^2 = \frac{1}{2}$ ، بنابراین معادله نشان‌دهنده یک هذلولی است.

تست ۲. فرض کنید

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(1 + x + x^2)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

مقدار حد L کدام است؟

۱. ۰ ۲. ۱ ۳. e ۴. ∞

پاسخ. گزینه ۲ صحیح است. ابتدا در نظر می‌گیریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(1+x+x^2)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\circ)^{\frac{1}{x}}$$

از آنجا که $\circ \rightarrow \circ$ و $\frac{1}{x} \rightarrow \circ$ یک حالت مبهم است، باید از روش‌هایی مانند لگاریتم گیری استفاده کنیم. فرض

می‌کنیم $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$ که $f(x) = \frac{\ln(1+x+x^2)}{x}$. با لگاریتم طبیعی از دو طرف:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(f(x))}{x}$$

استفاده از تقریب برای $x \rightarrow \infty$ ، $\ln(x^2) = 2 \ln x$ ، $\ln(1+x+x^2) \approx \ln(x^2)$. پس:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{2 \ln x}{x} \right)$$

از طرفی داریم:

$$\ln(f(x)) \approx \ln \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) = \ln 2 + \ln(\ln x) - \ln x$$

بنابراین:

$$\ln L = \frac{\ln(f(x))}{x} \approx \frac{\ln 2 + \ln(\ln x) - \ln x}{x} \rightarrow \circ$$

چون $\frac{\ln(\ln x)}{x} \rightarrow \circ$ و $\frac{\ln x}{x} \rightarrow \circ$.

از آنجا که $\ln L = \circ$ ، پس $L = e^\circ = 1$.

تست ۳. فرض کنید تابع پله‌ای هویساید به صورت زیر تعریف شده است:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \circ \\ \circ & x < \circ \end{cases}$$

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(u)H(x-u)e^{-|x-u|} du$ را بیابید.

۱. ۰ ۲. ۱ ۳. ۲ ۴. بینهایت

پاسخ. گزینه ۱ صحیح است. برای حل این مسأله، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

گام ۱: تحلیل تابع $H(u)H(x-u)$

$H(u) = 1$ وقتی $u \geq \circ$

۱ $H(x-u) = 1$ وقتی $x-u \geq 0$ یا $u \leq x$

- بنابراین $H(u)H(x-u) = 1$ وقتی $0 \leq u \leq x$ و در غیر این صورت صفر است.

گام ۲: بازنویسی انتگرال با توجه به تحلیل بالا، انتگرال به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f(x) = \int_0^x e^{-|x-u|} du$$

گام ۳: بررسی مقدار $|x-u|$

اگر $x \geq 0$:

برای $u \in [0, x]$ ، $x-u \geq 0$ ، بنابراین $|x-u| = x-u$ ، پس:

$$f(x) = \int_0^x e^{-(x-u)} du = e^{-x} \int_0^x e^u du = e^{-x}(e^x - 1) = 1 - e^{-x}$$

اگر $x < 0$: بازه انتگرال $[0, x]$ معتبر نیست (چون $x < 0$)، بنابراین $f(x) = 0$

گام ۴: تعریف نهایی تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

گام ۵: بررسی پیوستگی

- برای $x > 0$: تابع $1 - e^{-x}$ پیوسته است.

- برای $x < 0$: تابع ثابت ۰ پیوسته است.

- در $x = 0$:

- حد چپ: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

- حد راست: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 - e^0 = 0$

- مقدار تابع در $x = 0$: $f(0) = 1 - e^0 = 0$

- بنابراین تابع در $x = 0$ نیز پیوسته است.

در نتیجه تابع $f(x)$ در تمام نقاط پیوسته است و هیچ نقطه ناپیوستگی ندارد.

تست ۴. فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ در بازه $[0, 1]$ پیوسته باشد و $f(0) = f(1)$. کدام مورد

همواره درست است؟

$$1. \quad c \in [0, \frac{1}{2}] \quad f(c) = f(c + \frac{1}{2})$$

$$۲. \quad c \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \quad f(c) = f\left(c + \frac{1}{4}\right)$$

$$۳. \quad c \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \quad f(c) = 0$$

$$۴. \quad c \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \quad f(c) = f\left(c + \frac{1}{4}\right)$$

پاسخ. گزینه ۲ صحیح است. برای بررسی صحت گزینه‌ها، با توجه به داده‌های سوال، فرض می‌کنیم:

$$\text{تابع } f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \text{ در بازه‌ی } [0, 1] \text{ پیوسته است و همچنین } f(0) = f(1)$$

هدف ما بررسی یک ویژگی خاص از توابع پیوسته روی بازه‌هایی با شرایط مرزی یکسان است. این دقیقاً

حالتی است که قضیه معروف مقدار میانی را به ذهن می‌آورد.

مرحله اول: تابع کمکی

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

را تعریف می‌کنیم، برای $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. چون f روی $[0, 1]$ پیوسته است، پس g نیز پیوسته است. همچنین

چون $f(0) = f(1)$ ، در این بازه هیچ مشکل تعریف‌پذیری وجود ندارد.

حال اگر $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{4}\right)$ مقادیر متضادی داشته باشند، آنگاه طبق قضیه مقدار میانی، حتماً عددی $c \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$

وجود دارد که

$$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = f\left(c + \frac{1}{4}\right)$$

حتی اگر متضاد هم نباشند و مثلاً یکی صفر باشد، باز هم داریم $f(c) = f\left(c + \frac{1}{4}\right)$ برای آن مقدار.

در مجموع، چون تابع پیوسته است و مقدار ابتدا و انتهای بازه برابرند، این خاصیت برای فاصله $\frac{1}{4}$

تضمین می‌شود.

گزینه ۱: $f(c) = f\left(c + \frac{1}{4}\right)$ ، $c \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ مجموع بازه: $c + \frac{1}{4} \leq 1$ ، درست. اما هیچ تضمینی وجود

ندارد که تابع دو مقدار در فاصله‌ی $\frac{1}{4}$ رو تکرار کند پس همواره درست نیست.

گزینه ۲: $f(c) = f\left(c + \frac{1}{4}\right)$ ، $c \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ همان‌طور که نشان دادیم با تعریف $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{4}\right)$ ،

و با توجه به پیوستگی تابع و برابری مقدار ابتدا و انتها، حتماً حداقل یک مقدار $c \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ وجود دارد که

این رابطه را برقرار کند. پس این گزینه همواره درست است.

گزینه ۳: $f(c) = 0$ ، $c \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ اصلاً تضمینی نیست. ممکنه تابع همیشه مقدار ۱ بگیرد! پس غلط

است.

گزینه ۴: $f(c) = f\left(c + \frac{1}{4}\right)$, $c \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ این هم مثل گزینه ۱، هیچ تضمینی برای بازه‌ی با فاصله‌ی $\frac{1}{4}$ وجود ندارد. پس نادرست است.

تست ۵. خط مماس بر منحنی $f(x) = 4^{ax}$ در نقطه‌ای به طول صفر واقع بر آن محور x ها را در نقطه‌ای به طول $x = -2$ ، قطع می‌کند. مقدار a کدام است؟

$$1. \frac{1}{4 \ln 2} \quad 2. \frac{1}{4} \quad 3. \frac{1}{2 \ln 2} \quad 4. \frac{1}{2}$$

پاسخ صحیح: گزینه ۱. طبق فرض $1 = 4^{a \cdot 0} = f(0)$ بنابراین نقطه تماس $(0, 1)$ است.

$$f'(x) = 4^{ax} \cdot \ln 4 \cdot a = 4^{ax} \cdot 2 \ln 2 \cdot a$$

شیب در نقطه $x = 0$:

$$f'(0) = 2a \ln 2$$

با استفاده از فرمول خط مماس:

$$y - 1 = 2a \ln 2 (x - 0) \implies y = 2a \ln 2 \cdot x + 1$$

در نقطه تقاطع با محور x ، $y = 0$ است لذا:

$$0 = 2a \ln 2 \cdot x + 1 \implies x = -\frac{1}{2a \ln 2}$$

طبق فرض مسئله این نقطه برابر $x = -2$ است:

$$-\frac{1}{2a \ln 2} = -2 \implies \frac{1}{2a \ln 2} = 2$$

$$\implies 2a \ln 2 = \frac{1}{2} \implies a = \frac{1}{4 \ln 2}$$

تست ۶. تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ m, & x = 1 \end{cases}$$

که در آن $m, n \in \mathbb{N}$. اگر f در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(1) = 6$ ، آنگاه مقدار $m + n$ کدام است؟

$$1. 5 \quad 2. 7 \quad 3. 6 \quad 4. 11$$